Cuaderno de notas de trabajo

Carlos Graef Fernández

Cuaderno Sn 14

En la Teoría de las Formas Diferenciales se consideran espacios vectoriales sobre el campo de los números reales.

Sea $\mathbb{R}$ el campo de los reales y sean a, b, c elementos de $\mathbb{R}$.

$a \in \mathbb{R}$;

$b \in \mathbb{R}$;

$c \in \mathbb{R}$.

Ejemplos particulares:

$3 \in \mathbb{R}$; $|\sqrt{2}| \in \mathbb{R}$; $\pi \in \mathbb{R}$.

Sea $\mathbb{L}$ un espacio vectorial de n dimensiones sobre $\mathbb{R}$ con la base

$\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \cdots \cdots \sigma^n$.

Las σ^i $i = 1, 2, 3, \cdots n$ son n vectores de $\mathbb{L}$ linealmente independientes. Todo vector de

Sea k un número real y α un vector de $\mathbb{L}$:

$k \in \mathbb{R}$; $\alpha \in \mathbb{L}$.

Se definen los productos $k\alpha$ y αk por medio de la ecuación:

$$k\alpha = \alpha k = ka_1\sigma^1 + ka_2\sigma^2 + ka_3\sigma^3 + \cdots + ka_n\sigma^n$$

Si multiplicamos el número real k por la suma de vectores $\alpha+\beta$ obtenemos:

$$k(\alpha+\beta) = (ka_1+kb_1)\sigma^1 + (ka_2+kb_2)\sigma^2 + (ka_3+kb_3)\sigma^3 + \cdots + (ka_n+kb_n)\sigma^n$$

Se ve inmediatamente que

$$k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta.$$

$\mathbb{L}$ es una suma:

$$a_1\sigma^1 + a_2\sigma^2 + a_3\sigma^3 + \cdots + a_n\sigma^n,$$

en la que $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Designamos con letras griegas minúsculas los vectores de $\mathbb{L}$. Escribimos a continuación varios vectores de $\mathbb{L}$:

$$\alpha = a_1\sigma^1 + a_2\sigma^2 + a_3\sigma^3 + \cdots + a_n\sigma^n;$$

$$\beta = b_1\sigma^1 + b_2\sigma^2 + b_3\sigma^3 + \cdots + b_n\sigma^n;$$

$$\gamma = c_1\sigma^1 + c_2\sigma^2 + c_3\sigma^3 + \cdots + c_n\sigma^n.$$

La suma de dos vectores se define por medio de la ecuación:

$$\cancel{\alpha + \beta = (a_1 + b_1)\sigma^1 + (a_2 + b_2)\sigma^2 + (a_3 + b_3)\sigma^3 + \cdots + (a_n + b_n)\sigma^n}$$

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1)\sigma^1 + (a_2 + b_2)\sigma^2 + (a_3 + b_3)\sigma^3 + \cdots + (a_n + b_n)\sigma^n.$$

Nótese que $\alpha + \beta$ es un vector de $\mathbb{L}$.

Sean k y l dos números reales, entonces

$k \in \mathbb{R}$ y $l \in \mathbb{R}$.

El vector $k\alpha + l\beta$ es por definición:

$$k\alpha + l\beta = (ka_1 + lb_1)\sigma^1 + (ka_2 + lb_2)\sigma^2 + (ka_3 + lb_3)\sigma^3 + \cdots + (ka_n + lb_n)\sigma^n.$$

Este vector es una combinación lineal de α y β. Nótese que

$$k\alpha + l\beta \in \mathbb{L}.$$